07/12/20

(Πx) **Άσκηση Β.22, σελ.33 (Άλυτες ασκήσεις)**

$y''+p(x)y'+q(x)y=1+x$ (E), με $p,q\in C(\mathbb{R})$.

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (E₀)

Λύση: • $y_1(x)=(1+x)^2$, $x\in\mathbb{R}$ λύση της (E₀).

• $w(\tilde{y_1},\tilde{y_2})=$ σταθερό, $\forall \tilde{y_1},\tilde{y_2}$ λύσεις.

(Α' τρόπος): y_1 επαλήθευση της (E₀) $\to$ q, p υποβιβασμός τάξης.

(Β' τρόπος): Ας είναι y_2 λύση της (E₀): $\{y_1,y_2\}$ β.σ.λ.

τότε θα είναι $w(y_1,y_2)=c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$.

Επομένως, θα είναι:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=c \Rightarrow y_1y_2'-y_2y_1'=c\ (=1)$$

Συνεπώς, $2(x+1)y_1'-(x+1)^2y_1=1$, $\Rightarrow y_1=\dots$

$\leadsto \{y_1,y_2\}$: $\leadsto y_{\mu\varepsilon\rho}\to$ ○

$$\frac{y_1y_2'-y_2y_1'}{y_1^2}=\frac{c}{y_1^2},\ (x\neq -1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{c}{y_1^2}\Rightarrow y_2=y_1\int\frac{c}{y_1^2}$$

$$\Rightarrow y_2=(1+x)^2\int\frac{c}{(1+x)^4}=(1+x)^2c\left[\frac{-1}{(1+x)^3\cdot 3}\right]\Rightarrow y_2\overset{c=3}{=}\frac{-1}{1+x}\ //\ \lambda>-1,\ x<-1$$

(Πx) **Άσκηση Β.51, σελ.39 (Άλυτες Ασκήσεις)**

$b\in C([0,+\infty))$: $\displaystyle\int_x^{x+1}|b(s)|ds\le c,\ \forall x\geq 0$

Λύση: (i) $\displaystyle e^{-x}\int_x^{x+1}e^s|b(s)|ds\le c\cdot\frac{e}{e-1},\ x\geq 0.$

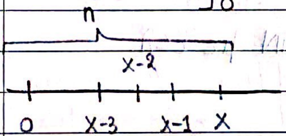
(ii) $\rightarrow y''+2y'+2y=b$, φραγμένες λύσεις στο $[0,+\infty)$

(iii) $$\int_0^x e^s|b(s)|ds = \int_{x-1}^{x} e^s|b(s)|ds + \int_{x-2}^{x-1} e^s|b(s)|ds + \dots + \int_{x-[x]-1}^{x-[x]} e^s + \int_0^{x-[x]} e^s|b(s)|ds \leq$$

$$\leq e^x \int_{x-1}^{x} |b(s)|ds + e^{x-1}\int_{x-2}^{x-1} |b(s)|ds + \dots + e^{x-[x]-1}\int_{x-[x]-1}^{x-[x]} |b(s)|ds + e^{x-[x]}\int_0^{x-[x]} |b(s)|ds \leq$$

$$\leq e^x\cdot c + e^{x-1}c + e^{x-2}\cdot c + \dots + e^{x-[x]}\cdot c =$$
$$= e^x\cdot c\left\{1+\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\dots+\frac{1}{e^{[x]}}\right\} =$$
$$= e^x\cdot c\left\{1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots+\dots\right\} = e^x\cdot c\cdot\frac{1}{1-(1/e)} = e^x\,\frac{ce}{e-1}$$

Δηλαδή είναι: $\int_0^x e^s|b(s)|ds \leq e^x\cdot c\cdot\frac{e}{e-1}$



, $[x]=n\in\mathbb{N}$.

(Πx) Άσκηση : $y''+2y'+2y=b$

Λύση: $\lambda^2+2\lambda+2 \rightsquigarrow \lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm i2}{2}=-1\pm i$

Β.σ.λ. : $\{e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\}$

$\longrightarrow y=y_\mu+\underline{c_1y_1+c_2y_2} \nearrow$ φραγμένο

$|y(t)|\leq|y_\mu(t)|+|c_1||e^{-t}\cos t|+|c_2|\cdot|e^{-t}\sin t|\leq|y_\mu(t)|+|c_1|+|c_2|,\ t\geq 0$

Αρκεί νδο y_μ φραγμένο:

$$y_\mu(t)=y_1(t)\cdot\int_0^t\frac{W_1(s)}{W(s)}\cdot b(s)ds+y_2(t)\cdot\int_0^t\frac{W_2(s)}{W(s)}b(s)ds.$$

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t & -e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t \end{vmatrix}=e^{-2t}$$

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & e^{-t}\sin t \\ 1 & ? \end{vmatrix}=-e^{-t}\sin t$$

$$W_2(t)=\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & 0 \\ ? & 1 \end{vmatrix}=e^{-t}\cos t$$

$$\left|y_1(t)\cdot\int_0^t \frac{-e^{-s}\sin s}{e^{-2s}}\,ds\right| \le e^{-t}|\cos t|\left|\int_0^t e^{s}|\sin s|\cdot|b(s)|\,ds\right| \le e^{-t}\int_0^t e^{s}\cdot|b(s)|\,ds.$$

$$\le \left(\frac{c\cdot e}{e-1}\right).$$

• **Αθροίσματα:**

• $\sum_{i=k}^{\lambda} f(i)=f(k)+f(k+1)+\ldots+f(\lambda)$, $k,\lambda\in\mathbb{Z},\mathbb{N}$ με $k\le\lambda$.

<u>πχ:</u> $\sum_{i=5}^{9}\left[i/_{i+1}\right]=\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}+\frac{9}{10}$

• $\sum_{k=i}^{\lambda}(m a_i+p b_i)=m\cdot\sum_{k=i}^{\lambda} a_i+p\sum_{k=i}^{\lambda} b_i$

• $\sum_{i=k}^{\lambda} f(i)+\sum_{i=\lambda+1}^{m} f(i)=\sum_{i=k}^{m} f(i)$

<u>πχ:</u> $\sum_{i=100}^{1000} f(i)=\sum_{100}^{200} f(i)+\sum_{201}^{1000} f(i)$

• $\sum_{i=k}^{\lambda} f(i) = \sum_{i=k-p}^{\lambda-p} f(i+p)$, $p\in\mathbb{Z}$

Πχ: $\sum_{i=10}^{15} i^2 = \sum_{i=13}^{18} (i-3)^2$

• **Σειρές:**

Έστω a_n ακολουθία,

Η S_n είναι μια σειρά: (S_n): $S_n = a_1 + .. + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\ell\in\mathbb{R}$

Έστω $\sum a_n$, $\sum b_n$ συγκλίνουν, τότε:

$$\sum_{n=p}^{\infty} (k a_n + \lambda b_n) = k\sum_{n=p} a_n + \lambda \sum_{n=p} b_n$$

↳ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k+s}^{\infty} a_{n-s}$, $\rightarrow$ $\sum_{n=k}^{\lambda} a_n + \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} a_n$.

• **Δυναμοσειρές:**

• $x: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot x^n$

(a_n): $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $R = \dfrac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}}$ $\begin{cases} \in\mathbb{R}, & \limsup \neq 0 \\ +\infty, & \limsup = 0 \\ 0, & \limsup = +\infty \end{cases}$

Το R ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης.

Πχ: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ | $a_n = n$

$\limsup\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} = 1$

$R = 1/1 = 1$ και $|x|<1=R$ με $x\in(-1,1) \Rightarrow \sum n\cdot x^n < \infty$, $x\in(-1,1)$.

• $f(x)=\sum a_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R \Rightarrow \lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n^r}}\right|$ συγκλίνει.

(*) $|x-x_0|<R$: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ τότε $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot (x-x_0)^{n-1}\cdot n$.